第26卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 5
2009年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0946-05

带B-D反应项的捕食-食饵模型正解的一致持续性*

郭改慧, 李艳玲

(陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062)

摘 要: 本文利用上下解方法和稳定性理论，讨论了一类带Beddington-DeAngelis反应项的捕食-食饵模型解的渐近行为，给出了正解一致持续的充分条件。同时，利用上下解方法证明了一个正的全局吸引子的存在性。文中的结果表明，在一定的条件下，相互作用的种群是可以持续生存的。

关键词: Beddington-DeAngelis反应项；稳定；一致持续

分类号: **AMS**(2000) 35K57 **中图分类号**: O175.26 **文献标识码**: A

1 引言

本文主要研究一类带Beddington-DeAngelis (简称B-D) 反应项的捕食-食饵模型

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=\big(a-u-\frac{bv}{1+mu+kv}\big)u, & x\in\Omega, \quad t>0,\\ v_t-\Delta v=\big(c-v+\frac{du}{1+mu+kv}\big)v, & x\in\Omega, \quad t>0,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega, \quad t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), \quad v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中Ω为$\mathbf{R}^n$中具有光滑边界的有界开区域，a, b, d均为正常数，m, k为非负常数，c可正可负。模型(1)的生物背景和各参数的生物意义可参见文献[1,2]。本文将给出(1)正解的一致持续性及全局吸引子的存在性，所采用的方法是上下解方法和稳定性理论。

2 准备知识

设λ_1是算子$-\Delta$在齐次Dirichlet边界条件下的主特征值，相对应的特征函数不妨设为$\Phi_1>0$ $(x\in\Omega)$。记问题

$$-\Delta u+q(x)u=\lambda u, \quad x\in\Omega, \quad u=0, \quad x\in\partial\Omega$$

的主特征值为$\lambda_1(q)$，其中$q(x)\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $0<\alpha<1$。显然$\lambda_1(0)=\lambda_1$，且$\lambda_1(q)$关于q严格单调递增。考虑单个方程

$$-\Delta u=uf(x,u), \quad x\in\Omega, \quad u=0, \quad x\in\partial\Omega, \tag{2}$$

其中$f(x,u):\overline{\Omega}\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}$满足

收稿日期: 2008-01-07. **作者简介**: 郭改慧(1979年9月生)，女，博士. 研究方向：微分方程及其计算.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10571115)；国家自然科学基金数学天元青年基金(10726042).

(H1) $f(x,u)$ 是关于 x 的 C^α 函数，$0<\alpha<1$；

(H2) $f(x,u)$ 是关于 u 的 C^1 函数，且对任意的 $(x,u)\in\overline{\Omega}\times[0,+\infty)$，$f_u(x,u)<0$；

(H3) 存在常数 $C>0$，使得当 $(x,u)\in\overline{\Omega}\times[C,+\infty)$ 时，$f(x,u)<0$。

引理1[3] 如果 $f(x,u)$ 满足 (H1)-(H3)，则有以下结论：

(i) 若 $\lambda_1(-f(x,0))\geqslant 0$，则 (2) 没有正解。而且，平凡解 $u=0$ 是整体渐近稳定的；

(ii) 若 $\lambda_1(-f(x,0))<0$，则 (2) 存在惟一正解，且是整体渐近稳定的。

本文主要讨论系统 (1) 解的长时行为。为此，首先证明系统 (1) 的解是全局存在的。

令

$$f(u,v)=u\Big(a-u-\frac{bv}{1+mu+kv}\Big),\quad g(u,v)=v\Big(c-v+\frac{du}{1+mu+kv}\Big).$$

显然 f, g 在 $[\underline{u}, \overline{u}]\times[\underline{v}, \overline{v}]$ 上满足 Lipschitz 条件。令 U, V_U 分别是方程

$$\begin{cases} U_t-\Delta U=U(a-U), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ U=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\ U(x,0)=u_0(x)\geqslant 0, & x\in\Omega \end{cases}\tag{3}$$

和

$$\begin{cases} (V_U)_t-\Delta V_U=V_U\big(c-V_U+\frac{dU}{1+mU+kV_U}\big), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ V_U=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\ V_U(x,0)=v_0(x)\geqslant 0, & x\in\Omega \end{cases}\tag{4}$$

的解。利用文献 [4] 中定理 12.5 可得

定理1 令 $(u(x,0),v(x,0))=(u_0(x),v_0(x))\geqslant(0,0)$，那么 (1) 存在惟一整体解 (u,v) 满足

$$(0,0)\leqslant(u,v)\leqslant(U,V_U),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty).$$

若 $u_0\not\equiv 0$ 且 $v_0\not\equiv 0$，则 (u,v) 是 (1) 的正解。

3 正解的一致持续性

方程 (1) 对应的平衡态方程为

$$\begin{cases} -\Delta u=\big(a-u-\frac{bv}{1+mu+kv}\big)u, & x\in\Omega,\\ -\Delta v=\big(c-v+\frac{du}{1+mu+kv}\big)v, & x\in\Omega,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}\tag{5}$$

显然 (5) 有平凡解 $(0,0)$。由准备知识很容易看出，当 $a>\lambda_1$ 时，(5) 有半平凡解 $(\Theta_{[a]},0)$；当 $c>\lambda_1$ 时，(5) 有半平凡解 $(0,\Theta_{[c]})$。

本节首先给出平凡解、半平凡解的渐近性和稳定性情况，即引理2-6，这与方程 (1) 正解的一致持续性密切相关。由于这些引理的证明是基本的，在这里我们只给出结论。

引理2 对任意 $x\in\overline{\Omega}$，若 $a\leqslant\lambda_1$，$c\leqslant\lambda_1$，则 (1) 的解 (u,v) 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}(u,v)=(0,0)$；若 $a\leqslant\lambda_1$，$c>\lambda_1$，则有 $\lim\limits_{t\to\infty}(u,v)=(0,\Theta_{[c]})$。

引理3 设$a > \lambda_1$, $c + \frac{da}{1+ma} < \lambda_1$，则(1)的解$(u,v)$满足

$$\lim_{t\to\infty}(u,v) = (\Theta_{[a]},0).$$

引理4 设

$$\lambda_1 - \frac{da}{1+ma} < c < \lambda_1,$$

则存在$\alpha > \lambda_1$，满足

$$c = \lambda_1\Big(-\frac{d\Theta_{[\alpha]}}{1+m\Theta_{[\alpha]}}\Big),$$

使得当$\lambda_1 < a < \alpha$时，$(\Theta_{[a]},0)$是线性稳定的；当$a > \alpha$时，$(\Theta_{[a]},0)$是不稳定的。

引理5 若$a > \lambda_1$, $c > \lambda_1$，则$(\Theta_{[a]},0)$是不稳定的。

引理6 若

$$a > \lambda_1\Big(\frac{b\Theta_{[c]}}{1+k\Theta_{[c]}}\Big), \quad c > \lambda_1,$$

则$(0,\Theta_{[c]})$是不稳定的。

定义映射$S(t):(u_0,v_0)\to(u(t),v(t))$ $(\forall\, t \geqslant 0)$，那么$S(t)$是从$C_0^+(\Omega)\times C_0^+(\Omega)$到$C_0^+(\Omega)\times C_0^+(\Omega)$的一个半动力系统。

定理2 若

$$c > \lambda_1, \quad a > \lambda_1\Big(\frac{b\Theta_{[c]}}{1+k\Theta_{[c]}}\Big),$$

则方程(1)的解是一致持续的。

证明 令$X^0 = \{(u,v)\in[C_0^+(\overline{\Omega})]^2 : u(x) > 0,\, v(y) > 0, \forall\, x,y\in\Omega\}$。显然$X^0$是一个开集，且关于半动力系统$S(t)$是不变集。$\partial X^0$也是不变的。令

$$X = X^0 \cup \partial X^0, \quad S_a = (\Theta_{[a]},0), \quad S_0 = (0,0), \quad S_c = (0,\Theta_{[c]}).$$

设边界上$S(t)$的ω-极限集为A_δ，由于S_a吸引$\{(u,0),\, u \geqslant 0, \neq 0\}$，$S_c$吸引$\{(0,v),\, v\geqslant 0,\neq 0\}$，则$A_\delta = \{S_a, S_0, S_c\}$。令$M = \{M_1, M_2, M_3\} \equiv \{S_a, S_0, S_c\}$是$A_\delta$的一个覆盖。因为原点为排斥的，故在边界上没有一个循环覆盖。我们只须证明M_i的稳定集$W_i^+(M_i)$与X^0不相交，即$W_i^+(M_i)\cap X^0 = \oslash$, $i = 1,2,3$。从而证明这个覆盖是孤立的。

假设$W_1^+(M_1)\cap X^0 \neq \oslash$，则存在$(u_0,v_0)\in X^0$，使得对任意的$x\in\overline{\Omega}$，$(u(t),v(t)) = S(t)(u_0,v_0) \to (\Theta_{[a]},0)\,(t\to\infty)$。由比较定理知，$v(x,t) \geqslant V(x,t)$, $x\in\overline{\Omega}$, $t > 0$，其中$V(x,t)$满足

$$\begin{cases} V_t - \Delta V = cV - V^2, & x\in\Omega, \quad t>0,\\ V = 0, & x\in\partial\Omega, \quad t>0,\\ V(x,0) = v_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

由于$c > \lambda_1$，那么$\lim\limits_{t\to\infty} V = \Theta_{[c]}$。设$\Omega_0$为$\Omega$的一个非空子集。令

$$r_1 \triangleq \min_{\overline{\Omega}_0}\Theta_{[c]}(x),$$

显然$r_1 > 0$。取$0 < \epsilon_1 < \frac{1}{2}r_1$，则存在$t_0 > 0$，使得

$$v(x,t) \geqslant V(x,t) \geqslant \Theta_{[c]} - \epsilon_1 > \frac{1}{2}r_1, \quad x\in\Omega_0, \quad t\geqslant t_0.$$

与 $\lim\limits_{t\to\infty} v=0$ 矛盾。类似可证明 $W_2^+(M_2)\cap X^0=\oslash$。接下来只须证明 $W_3^+(M_3)\cap X^0=\oslash$。假设存在 $(u_0,v_0)\in X^0$，使得对任意的 $x\in\overline{\Omega}$，$(u(t),v(t))=S(t)(u_0,v_0)\to(0,\Theta_{[c]})(t\to\infty)$。因此对任意的 $\epsilon>0$，存在 $t_0'>0$，使得

$$0\leqslant u(x,t)<\epsilon,\quad |v(x,t)-\Theta_{[c]}(x)|<\epsilon,\quad x\in\overline{\Omega},\quad t\geqslant t_0'.$$

由比较定理知，$u(x,t)\geqslant\tilde{U}(x,t)$，其中 $\tilde{U}(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\tilde{U}_t-\Delta\tilde{U}=a\tilde{U}-\tilde{U}^2-\frac{b(\Theta_{[c]}+\epsilon)}{1+k(\Theta_{[c]}+\epsilon)}\tilde{U}, & x\in\Omega,\quad t\geqslant t_0',\\ \tilde{U}=0, & x\in\partial\Omega,\quad t\geqslant t_0',\\ \tilde{U}(x,t_0')=u(x,t_0'), & x\in\Omega.\end{cases}\tag{6}$$

由于

$$a>\lambda_1\Big(\frac{b\Theta_{[c]}}{1+k\Theta_{[c]}}\Big),$$

选取充分小 ϵ，使得

$$a>\lambda_1\Big(\frac{b(\Theta_{[c]}+\epsilon)}{1+k(\Theta_{[c]}+\epsilon)}\Big),$$

从而有 $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{U}=\tilde{U}_a$，其中 $\tilde{U}_a$ 是(6)所对应的平衡态系统的惟一正解。令

$$r_2\triangleq\min_{\overline{\Omega}_0}U_a(x),$$

显然 $r_2>0$。取 $0<\epsilon_2<\frac{1}{2}r_2$，那么存在 $t_0''>t_0'$，使得

$$u(x,t)\geqslant\tilde{U}(x,t)\geqslant\tilde{U}_a-\epsilon_2\geqslant r_2-\epsilon_2>\frac{1}{2}r_2,\quad x\in\overline{\Omega}_0,\quad t\geqslant t_0''.$$

与 $\lim\limits_{t\to\infty} u=0$ 矛盾。因此 M 是 A_δ 的一个孤立覆盖，进而由文献[5]中定理4.1可得，当

$$c>\lambda_1,\quad a>\lambda_1\Big(\frac{b\Theta_{[c]}}{1+k\Theta_{[c]}}\Big)$$

时，(1)的解是一致持续的。

设 $a-\frac{b}{k}>\lambda_1$，$c>\lambda_1$。令 Φ_1,Φ_2 分别为对应于 $\lambda_1(-a+\frac{b}{k})$ 和 $\lambda_1(-c)$ 的主特征函数。取 ρ_1,ρ_2 充分小，则 $(\Theta_{[a]},V_{\Theta_{[a]}})$，$(\rho_1\Phi_1,\rho_2\Phi_2)$ 即为(5)的一对上下解，其中 $V_{\Theta_{[a]}}$ 是方程

$$\begin{cases}-\Delta V_{\Theta_{[a]}}=V_{\Theta_{[a]}}\Big(c-V_{\Theta_{[a]}}+\frac{d\Theta_{[a]}}{1+m\Theta_{[a]}+kV_{\Theta_{[a]}}}\Big), & x\in\Omega,\\ V_{\Theta_{[a]}}=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的惟一正解。

下面的定理给出了全局吸引子的存在性。

定理3 如果 $a-\frac{b}{k}>\lambda_1$，$c>\lambda_1$，那么(5)存在一对拟解，即存在 $(\tilde{u},\tilde{v})$, $(\hat{u},\hat{v})$，且 $\tilde{u}\geqslant$

$\hat{u}$, $\tilde{v} \geqslant \hat{v}$，满足方程

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} = \left(a - \tilde{u} - \frac{b\hat{v}}{1+m\tilde{u}+k\hat{v}}\right)\tilde{u}, & x \in \Omega, \\ -\Delta\hat{u} = \left(a - \hat{u} - \frac{b\tilde{v}}{1+m\hat{u}+k\tilde{v}}\right)\hat{u}, & x \in \Omega, \\ -\Delta\tilde{v} = \left(c - \tilde{v} + \frac{d\tilde{u}}{1+m\tilde{u}+k\tilde{v}}\right)\tilde{v}, & x \in \Omega, \\ -\Delta\hat{v} = \left(c - \hat{v} + \frac{d\hat{u}}{1+m\hat{u}+k\hat{v}}\right)\hat{v}, & x \in \Omega, \\ \hat{u} = \tilde{u} = 0, \quad \hat{v} = \tilde{v} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

且 $[\hat{u}, \tilde{u}] \times [\hat{v}, \tilde{v}]$ 是 (1) 的一个正的全局吸引子。

证明 由比较原理及文献[6]，我们很容易找到 (5) 的一对拟解。关于全局吸引子的存在性，利用文献[4,6]，我们只须说明存在 $t_* > 0$，使得当 $t = t_*$ 时，(1) 对应于任意初值 $(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \geq (0,0), \neq (0,0)$ 的解 (u,v) 满足

$$(u,v) \in [\rho_1\Phi_1,\, \Theta_{[a]}] \times [\rho_2\Phi_2,\, V_{\Theta_{[a]}}].$$

设 (u,v) 是 (1) 的一个正解，由定理1知，$u \leqslant U(x,t)$, $v \leqslant V_U(x,t)$，其中 U, V_U 分别是 (3), (4) 的解。由于当 $t \to \infty$ 时，$U(x,t) \to \Theta_{[a]}$, $V_U(x,t) \to V_{\Theta_{[a]}}$，那么存在 $T < \infty$，使得对任意 $t \geqslant T$，

$$u(x,t) \leqslant \Theta_{[a]}, \quad v(x,t) \leqslant V_{[\Theta_a]}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

因此存在 $t_* > 0$，使得当 $t = t_*$ 时，(1) 对应于任意初值 $(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \geq (0,0), \neq (0,0)$ 的解 (u,v) 满足 $(u,v) \in [\rho_1\Phi_1,\, \Theta_{[a]}] \times [\rho_2\Phi_2,\, V_{\Theta_{[a]}}]$。

参考文献：

[1] Beddington J R. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency[J]. J Animal Ecol, 1975, 44(1): 331-340

[2] DeAngelis D L, Goldstein R A, O'Neill R V. A model for tropic interaction[J]. Ecology. 1975, 56(2): 881-892

[3] Ryu K, Ahn I. Positive solutions for ratio-dependent predator-prey interaction systems[J]. J Differential Equation, 2005, 218(1): 117-135

[4] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations[M]. New York: Plenum Press. 1992

[5] Hale J K, Waltman P. Persistence in infinite dimensional systems[J]. SIAM J Math Anal, 1989, 20: 388-395

[6] Pao C V. Quasisolutions and global attractor of reaction-diffusion systems[J]. Nonlinear Anal, 1996, 26: 1889-1903

The Persistence of Positive Solutions for a Predator-prey Model with B-D Functional Response

GUO Gai-hui, LI Yan-ling

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract: The asymptotic behavior for a kind of predator-prey models with Beddington-DeAngelis (BD) functional response is discussed. The method of upper and lower solutions and the theory of stability are used. The persistence of time-dependent positive solutions to this system is derived. In addition, a positive global attractor is presented by the method of upper and lower solutions for a class of elliptic system. The result gives certain conditions which ensure the persistence of species.

Keywords: Beddington-DeAngelis functional response; stability; uniform persistence